- Eichinvarianz der Lagrangefunktion

Lagrangefunktion nicht eindeutig bestimmt

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}F(q,t)$$

$$L'(q,\dot{q},t) = \lambda L(q,\dot{q},t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda|>0$$

sind äquivalent, da

$$\delta S = 0 \iff \delta S' = 0$$

↳ keine Änderung der Bewegungsgleichungen.

↳ Eichinvarianz

2.7 Symmetrien und Erhaltungssätze

- $I(q,\dot{q},t)$ ist Erhaltungsgröße, wenn für alle erlaubten Bahnen $q(t)$: $\frac{d}{dt}I(q,\dot{q},t) = 0$

2.7.1 Noether Theorem (Emmy Noether, 1918)

- Def: Symmetrie

Sei φ^t eine Koordinaten-Transformation. Man nennt φ^t eine Symmetrietransformation, wenn für alle Kurven $q(t)$ und $y(t) = \varphi^t(q(t))$ gilt

$$L(y,\dot{y},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}F(q,t)$$

Dann gilt: Ist $q(t)$ Extremalkurve zu L, so gilt dies auch für $y(t) = \varphi^t(q(t))$.

Noether-Theorem

Sei φ_λ^t eine Symmetrie-Transformation, die kontinuierlich von einem reellen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt mit

$$\varphi^t_{\lambda=0}(q(t)) = q(t) \quad \text{und mit} \quad y = y(q,\lambda,t) = \varphi^t_\lambda(q(t))$$

$$L(y,\dot{y},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} F_\lambda(q,t)$$

Falls $q(t)$ Extremalkurve zu L ist, so gilt:

$$\sum_\alpha \left(\frac{d}{d\lambda} y_\alpha(q,\lambda,t)\right)\bigg|_{\lambda=0} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d F_\lambda(q,t)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}$$

ist eine Erhaltungsgröße:

- Definiere: Infinitesimale Erzeuger I_α

Sei $|\lambda| \ll 1$: $\quad y_\alpha(q,\lambda,t) = q_\alpha + \lambda \frac{d y_\alpha}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} + O(\lambda^2)$

$$\equiv q_\alpha + \lambda I_\alpha + O(\lambda^2)$$

$\Rightarrow$ Noether-Theorem: $\displaystyle\sum_\alpha \pi_\alpha I_\alpha - \frac{dF_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \text{const.}$

2.7.2 Zeittranslationsinvarianz

- Translation in der Zeit $\quad t \to t' = t + t_0$

nicht von Noether Theorem in obiger Form erfasst.

$\Rightarrow$ Sei $L = L(q,\dot{q}) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Aus $\frac{d}{dt} L(q,\dot{q})$ folgt:

$$\frac{d}{dt}\left\{L - \sum_\alpha \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right\} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \overset{\text{ELG}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $H = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \pi_\alpha - L$ ist Erhaltungsgröße

- für holonome, skleronome Zwangsbedingungen, konservative Kräfte und ruhende Bezugssysteme gilt

$$H = T + V = E \quad \text{Energie}$$

d.h. für solche Systeme folgt aus Zeittranslationsinv. Energieerhaltung!

2.7.3 Abgeschlossene Systeme, Galilei-Invarianz

- Betrachten N-Teilchen-Systeme mit

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

charakterisiert durch folgende Symmetrien

1) Zeittranslation: $t \mapsto t + t_0$
2) Raumtranslation: $\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \vec{a}$
3) Raumdrehung : $\vec{r}_i \mapsto O\vec{r}_i \quad O \in SO(3)$
4) spezielle Galilei-Trafo: $\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \vec{u}t \quad \frac{d}{dt}\vec{u} = 0$

- aus 1) Energieerhaltung!
- aus 2,3,4) & Noether-Theorem

Symmetrie	inf. Erzeuger I_i, F_λ	Erhaltungsgröße
$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{a}$	$I_i = 1$, $F_\lambda = 0$	Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$
$\vec{r}_i \to O\vec{r}_i$	$\vec{I}_i = \frac{\vec{\varphi}}{\vert\vec{\varphi}\vert} \times \vec{r}_i$, $F_\lambda = 0$	Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$
$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{u}t$	$I_i = t$ $F_\lambda = \lambda \frac{\vec{u}}{\vert\vec{u}\vert} \sum_i m_i \vec{r}_i + \frac{M}{2}\lambda^2 t$	Schwerpunktsatz $M\vec{R} - \vec{P}t$