• falls Kraft konservativ $\vec{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V$

↳ gen. Kraft $Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$

• dann mit <u>Lagrange-Funktion</u>

$$L = T(q,\dot{q},t) - V(q,t)$$

Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen (2. Art)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0\,, \quad \alpha = 1,\dots,f}$$

Beachte: Gelten in dieser Form nur für holonome ZB und Kräfte mit Potential

(oder allgemeiner für $Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)$)

• Definition <u>kanonischer/generalisierter Impuls</u> π_α

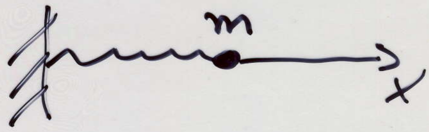
$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \longrightarrow \dot{\pi}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

↳ π_α ist Erhaltungsgröße falls $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

↳ Man nennt q_α dann <u>zyklische Variable</u>

2.5 Beispiele

(a) harmonischer Oszillator



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \xrightarrow{\text{ELG}} m\ddot{x} = -kx$$

(b) Bewegung im Zentralkraftfeld $V = V(|\vec{r}|)$

↳ ebene Polarkoordinaten r, φ

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(r)$$

$\xrightarrow{\text{ELG}}$ (i) $m\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r}$

(ii) $mr\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) = 0$

$\pi_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ ist erhalten, da $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

(c) Kugelpendel

- Zwangsbedingung $\vec{r}^2 = \ell^2$

↳ Kugelkoordinaten ϑ, φ und $r = \text{const}$

$$L = T - V = \frac{m\ell^2}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2\right) - mg\ell\cos\vartheta$$

$\xrightarrow{\text{ELG}}$ (i) φ ist zyklisch: $\pi_\varphi = m\ell^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}$

ist Erhaltungsgröße $\dot{\varphi} = \frac{\pi_\varphi}{m\ell^2 \sin^2\vartheta}$

(ii) $m\ell^2\ddot{\vartheta} - m\ell^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\, \dot{\varphi}^2 - mg\ell\sin\vartheta = 0$

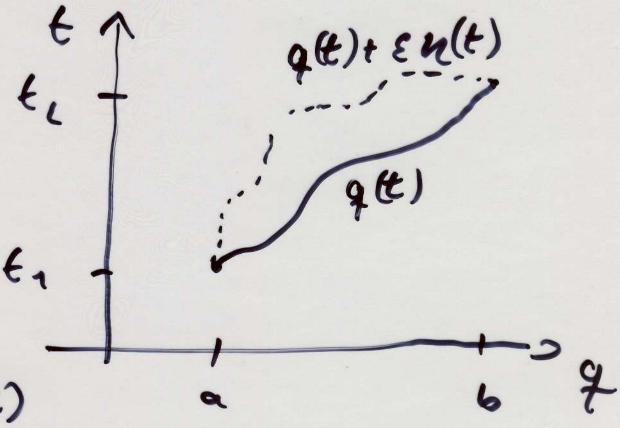
$\Rightarrow m\ell^2\ddot{\vartheta} - m\ell^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \frac{\pi_\varphi^2}{(m\ell^2\sin^2\vartheta)^2} - mg\ell\sin\vartheta = 0$

↳ unabhängig von φ!

2.7 Das Hamilton'sche Prinzip

• Definiere Wirkung S entlang Bahn

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$



Hamiltonsches Prinzip

Die physikalische Bahn $q(t)$ hat stationäre Wirkung $\delta S = 0$

$$\delta S = S(q + \delta q) - S(q) \stackrel{!}{=} 0$$

↳ Variationsproblem!

• Betrachte kleine Variation der Bahn $\delta q(t)$ mit $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$\hookrightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(\dot{q} + \delta\dot{q}, q + \delta q, t) - L(\dot{q}, q, t) \right\} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + O(\delta q^2) \right\} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q + \dots \right\} dt$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q\, dt + \dots \stackrel{!}{=} 0$$

↳ alle δq unabhängig $\Rightarrow$ ELG $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$