- Betrachte A zeitunabhängig

$$\leadsto \quad \dot{\vec{y}}(t) = A \cdot \vec{y}(t)$$

Ansatz $\vec{y}(t) = \vec{c}\, e^{\lambda t}$ $\leadsto$ charakteristische Gleichung

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$\leadsto$ $\operatorname{Re}\lambda$ entscheidet über Stabilität der Lösung!

(1) Falls für alle Eigenwerte $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, ist die ungestörte Lösung $\vec{y}(t) = 0$ asymptotisch stabil.

(2) Falls für mindestens einen Eigenwert $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, ist die ungestörte Lösung $\vec{y}(t) = 0$ instabil.

(3) Falls für keinen Eigenwert $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ sowie für mindestens einen $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, liegt kritischer Fall vor: linearisierte Gleichungen erlauben keine Entscheidung über Stabilität.

- Eigenwerte λ_i heißen Ljapunov-Exponenten.

6.4 Direkte Methode von Ljapunov

- Kenntnis der allg. Lösung ebenfalls nicht nötig
- Basiert auf Untersuchung einer Testfunktion, der sog. Ljapunov-Fkt. $V(\vec{y})$

die bestimmte Bedingungen erfüllen muss

wobei $\vec{y}$ wieder die Null-Lösung ist.

- Definition

  - $V(\vec{y})$ heißt positiv definit wenn $h>0, h\in\mathbb{R}$ existiert mit $V(\vec{y})>0$ für $0<|\vec{y}|<h$

  - $V(\vec{y})$ heißt positiv semi-definit wenn $h>0, h\in\mathbb{R}$ existiert mit $V(\vec{y})\geq 0$ für $0<|\vec{y}|<h$

  - analog für negativ definit

  - $V(\vec{y})$ heißt indefinit wenn es weder positiv noch negativ definit ist

- Ljapunov Testfunktion $V(\vec{y})$ muss erfüllen

  a) positiv definit und stetige partielle Abl. erster Ordnung

  b) $V(\vec{0})=0$

dann betrachte $\frac{d}{dt}V(\vec{y})$ entlang einer Trajektorie $y(t)$ und es gelten die Stabilitätssätze von Ljapunov

1) Null-Lösung stabil, wenn $\dot{V}(\vec{y})=0$ oder $\dot{V}(\vec{y})$ negativ semi-definit

2) Null-Lösung instabil, wenn $\dot{V}$ ~~definit~~ ~~definit~~ positiv defi

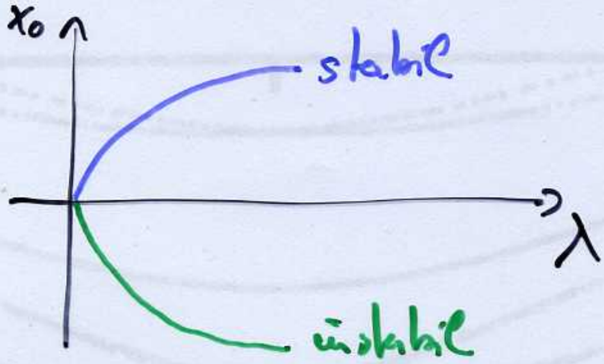
3) Null-Lösung ist asymptotisch stabil, wenn $\dot{V}$ negativ definit

Beachte: Kein Hinweis wie man Ljapunov Fkt. konstruiert. Benötigt Intuition und Erfahrung.

6.5 Bifurkationen

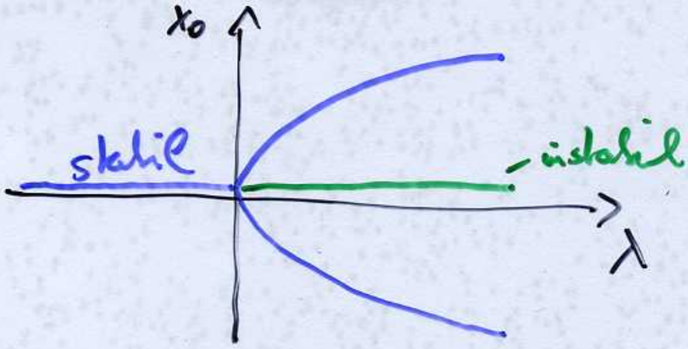
Struktur und Art der Lösungen können sich bei bestimmten Werten von Kontrollparametern ändern (qualitativ)

1) Sattelpunkt - Bifurkation
stabiler und instabiler Zweig stoßen zusammen



$\lambda \hat{=}$ Kontrollparameter

2) Heugabel - Bifurkation
3 stabile und ein instabiler Zweig stoßen zusammen



3) Hopf - Bifurkation mindestens 2d
stabiler Fixpunkt geht in Grenzzyklus über