5. Hamilton'sche Mechanik

5.1 Hamilton'sche Gleichungen

Def: Legendre Trafo

Übergang von Variablen x, y in $f(x,y)$ zu Variablen $u = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_y, y$ in $g(u,y)$ mit

$$g(u,y) = f(x(u,y),y) - u\,x(u,y)$$

mit
$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}\Big|_y$$

Die Trafo ist umkehrbar.

- Def: Hamilton-Funktion

$$H = H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}(p,q), t)$$

mit kanonischem Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

- Aus totalem Differential dH und den Lagrange-Gleichungen folgen dann Hamilton'sche Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; ; \; i = 1, \dots, f$$

2f DGL 1. Ordnung

und
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

im $\boxed{\text{Phasenraum}}$

- Das Paar q_i, p_i heißt kanonische Variable

p_i der zu q_i kanonische Impuls

- $H(p,q,t)$ ist Erhaltungsgröße, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad (\text{c.f. Kapitel } 2.7)$$

- Es gilt $H = E$ für skleronome, holonome Zwangsbed., ruhende Koordinaten und konservative Kräfte

↳ Für solche Systeme kann H ohne Legendre Trafo bestimmt werden, indem die Energie E durch Impulse und Koordinaten ausgedrückt wird.

- Systeme, die sich durch $H = H(p,q,t)$ beschreiben lassen nennt man <u>Hamilton'sche</u> oder <u>kanonische</u> <u>Systeme</u>

5.2 Zeitentwicklung und Poisson Klammern

- <u>Def</u> Eine diffbare Fkt. $f(q,p,t)$ der Variablen q_i, p_i, t heißt <u>Observable</u>
- <u>Def</u>: <u>Poisson-Klammern</u>: Observable f, g

$$\{f,g\}_{q,p} = \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right\}$$

und die Zeitableitung einer Observablen ist durch

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

gegeben.

· Eigenschaften der Poisson Klammern $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

- Linearität: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$
- Antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Produktregel $\{f \cdot g, h\} = f \{g, h\} + \{f, h\} g$
- Jacobi-Identität $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
- Nullelement $\{c_1, f\} = 0$
- fundamentale Elemente: $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$

· kanonische Gleichungen:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

§3 Kanonische Transformationen

· Suchen Klasse von Trafos

$$p \Rightarrow P = P(p, q, t)$$

$$q \Rightarrow Q = Q(p, q, t)$$

die kanonische Gleichungen forminvariant lassen

$$\left.\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} \\ \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} \end{aligned}$$

mit neuer Hamilton Funktion $K = K(P, Q, t)$

Hinreichende Bed. dafür ist

$$(2) \quad \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t) + \frac{d}{dt} F(p, q, P, Q, t)$$

für beliebige Funktion $F(p, q, P, Q, t)$

- Man nennt solche Trafos kanonische Transformationen
- in $F(p,q,P,Q,t)$ sind jeweils nur $2f$ Koordinaten unabhängig (F_5 & F_6 nicht eindeutig)

$\hookrightarrow F_1(q,Q,t)\,;\ F_2(q,P,t)\,;\ F_3(p,Q,t)\,;\ F_4(p,P,t)$

Die F_k heißen Erzeugende und beschreiben jeweils kanonische Trafos eindeutig.

- $F_1(q,Q,t)$

$$\hookrightarrow \quad \frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Einsetzen in (2), Benutze, dass $\dot{q}$ und $\dot{Q}$ unabhängig sind (da q und Q unabhängig) und anschließender Koeffizientenvergleich liefert

$$(3) \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\,,\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\,;\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$\hookrightarrow$ Trafo ist kanonisch, wenn Erzeugende $F_1(q,Q,t)$ existiert, die (3) erfüllt und für die
$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \text{ gilt.}$$

$\hookrightarrow$ Eine Erzeugende $F_1(q,Q,t)$ beschreibt mit (3) eine kanonische Trafo <u>eindeutig</u>.

• F_2, F_3, F_4 ergeben sich als Legendre Trafo von F_1

$$F_1(q,Q,t) \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \qquad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$F_2(q,P,t) \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$F_3(p,Q,t) \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \qquad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \qquad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$F_4(p,P,t) \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} \qquad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} \qquad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

• Wichtiges Beispiel

$$F_2(q,P,t) = \sum_i q_i P_i \implies p_i = P_i \quad Q_i = q_i$$

↳ Identische Transformation!

5.4 Symplektische Form der kanon. Mechanik

• Definiere $u = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)^T$

und $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0 \end{pmatrix} \qquad J^{-1} = J^T = -J; \det J = 1$

↳ $\dot{u} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial u} \qquad \left(\dot{u}_i = \sum_j J_{ij} \frac{\partial H}{\partial u_j} \quad i = 1, \dots, 2f \right)$

für kanon. zeitunabh. Trafo $u \to v = (Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f)$

↳ $\dot{v} = J \frac{\partial K}{\partial v}$ mit $K = H$

Transformationsmatrix $M_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial u_j}$

hat die Eigenschaft

$$\mathcal{J} = M \mathcal{J} M^T$$

M heißt <u>symplektische Matrix</u>

- aus $\det(\mathcal{J}) = 1$ folgt sofort $|\det M| = 1$
- $\det M$ ist eine <u>Funktionaldeterminante oder Jacobideterminante</u>
- Wir haben gezeigt: (längliche Rechnung in der Vorlesung)

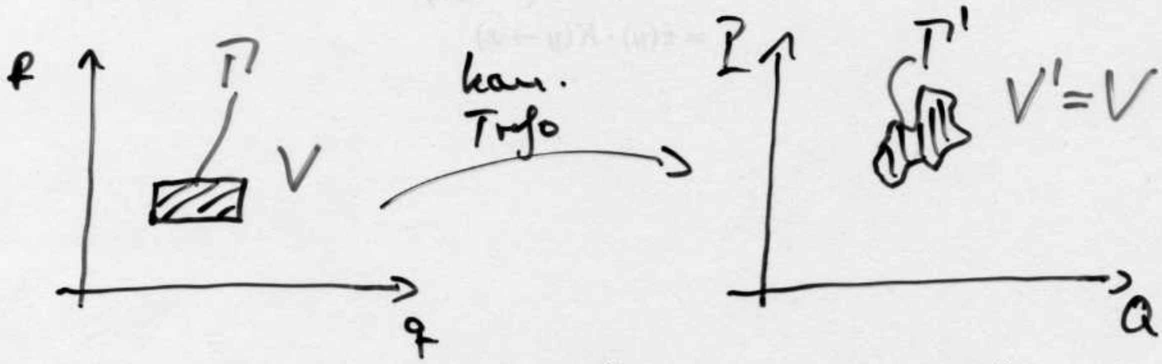
$$\underline{M \text{ ist symplektisch} \Longleftrightarrow \det M = 1}$$

↳ Für kanonische Trafos ist $\det M = 1$

5.5 Kanonische Invarianten

- Aus $\det M = 1$ für symplektische Matrix M folgt:

↳ Phasenraumvolumina (nicht aber der Form) bleiben unter kanonischen Trafos erhalten



- Außerdem sind die Poissonklammern invariant:

$$\{f,g\}_u = \{f,g\}_v = \{f,g\} \qquad u=(q,p) \longrightarrow v(Q,P)$$

$\Longleftrightarrow$ Eine Trafo ist genau dann kanonisch, wenn sie die Poissonklammern invariant läßt.

• und:

$$dV = dQ_1 \cdots dQ_f \, dP_1 \cdots dP_f = dq_1 \cdots dq_f \, dp_1 \cdots dp_f$$

5.6 Infinitesimale Transformationen und Noether Theorem

• Betrachten F_2 Trafo nahe der Identität: $(\varepsilon \ll 1)$

$$F = F(q, P, t; \varepsilon) = \sum_i p_i P_i + \varepsilon \phi(q, P, t) + O(\varepsilon^2)$$

↳ $\phi(q, P, t)$ infinitesimaler Erzeuger.

$$\hookrightarrow p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial q_i} + O(\varepsilon^2) = P_i + \varepsilon \frac{\partial \phi(q, p, t)}{\partial q_i} + O(\varepsilon^2)$$

$\phi(q, P, t)$

$p_i = P_i + O(\varepsilon)$

$$Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial \phi(q, p, t)}{\partial p_i} + O(\varepsilon^2)$$

$$\hookrightarrow \delta u = (Q_i - q_i, P_i - p_i) = \varepsilon J \frac{\partial \phi}{\partial u} = \varepsilon \{u, \phi\}$$

• mit Hamiltonfunktion H als infinitesimalem Erzeuger

$$\hookrightarrow \underline{\delta u = \varepsilon \{u, H\} = \varepsilon \dot{u}}$$

⇒ Infinitesimale Zeittranslation $t \to t + \varepsilon$ ist kanonische Trafo mit $H = H(p, q, t)$ als infinitesimalem Erzeuger.

• Änderung der Hamiltonfunktion unter inf. Trafo ϕ

$$K(u) = H(u) + \frac{d}{dt} \phi(u, t)$$

$$\hookrightarrow K(\bar{u}) = H(\bar{u}) \iff \frac{d}{dt} \phi = 0$$

ϕ ist Erhaltungsgröße!

Noether Theorem

Ist eine kanonische Trafo mit Erzeuger ϕ eine Symmetrietransformation $(K=H)$ $\Longleftrightarrow$ ϕ ist eine Konstante der Bewegung.

5.7 Satz von Liouville

- Infinitesimale Zeittranslation wird durch kanon. Trafo erzeugt. $\Rightarrow$ Phasenraumvolumen ist erhalten
- Wie verhält es sich mit endl. Zeittranslationen?

↳ kanonische Trafos (symplektische Matrizen) bilden eine Gruppe $Sp(2f, \mathbb{R})$

↳ Eine endl. Zeittranslation ist ebenfalls eine kanonische Trafo

$\Rightarrow$ Die im Phasenraum besetzte Fläche ist eine Konstante der Bewegung für ein autonomes System, das den Hamiltonschen Gleichungen genügt.

- Oder für die Dichte $\rho(p, q, t) \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Phasenraumpunkte pro Volumen gilt

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0$$

↳ Die Gesamtheit der Phasenraumpunkte strömt wie eine inkompressible Flüssigkeit im Phasenraum