Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 9

H.18: Legendre-Transformation (6P.)

Bei einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soll die Variable x_i zugunsten von $y_i = \partial f/\partial x_i$ eliminiert werden.

(a) Definieren Sie die Legendretransformierte bezüglich der i-ten Koordinate als $\mathcal{L}_i f \doteq f - y_i x_i$ und vergleichen Sie das totale Differential mit dem von f. Von welchen Variablen hängt $\mathcal{L}_i f$ also ab und wie lauten die Ableitungen danach? **(2p.)**

(b) Für welche f ist diese Transformation eindeutig? Was passiert für lineare f? Warum nimmt man nicht einfach die Tangentensteigung? **(2p.)**

(c) Berechnen Sie $\mathcal{L}f$ und $\mathcal{L}^2 f$ für $f(x) = a + bx^2$, sowie $\mathcal{L}^2 f$ für beliebiges f. Wann ist $\mathcal{L}$ involutiv (eine Abbildung F heißt Involution, wenn $F^2 = \mathrm{Id}$ gilt)? **(2p.)**

H.19: Ableitung der Lagrangegleichungen 2. Art (4P.)

Leiten Sie die Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

unter Verwendung einer Legendre-Transformation aus den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ab.

H.20: Hamiltonfunktion in verschiedenen Koordinatensystemen (10P.)

(a) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion einer Punktmasse in einem Potential V in kartesischen, zylindrischen und Koordinaten. **(3p.)**

(b) Ein Wagen fahre mit konstanter Geschwindigkeit v_0 entlang der x-Achse. Auf seiner Ladefläche schwingt eine Masse m, die über eine Feder mit der hinteren Wand des Wagens verbunden ist, reibungsfrei in x-Richtung vor und zurück (siehe Abb. 1). Stellen Sie die Lagrangfunktion auf und berechnen Sie die Hamiltonfunktion im ruhenden Koordinatensystem. Ist diese Hamiltonfunktion gleich der Energie und eine Erhaltungsgröße? **(4p.)**

(c) Wenden Sie die Transformation

$$x = x' + v_0 t$$

auf das bewegte Bezugssystem Wagens aus (b) an und untersuchen Sie erneut die resultierende Hamiltonfunktion. Zeigen Sie auch, dass die Bewegungsgleichungen für die beiden Hamiltonfunltionen aus (b) und (c) übereinstimmen. **(3p.)**

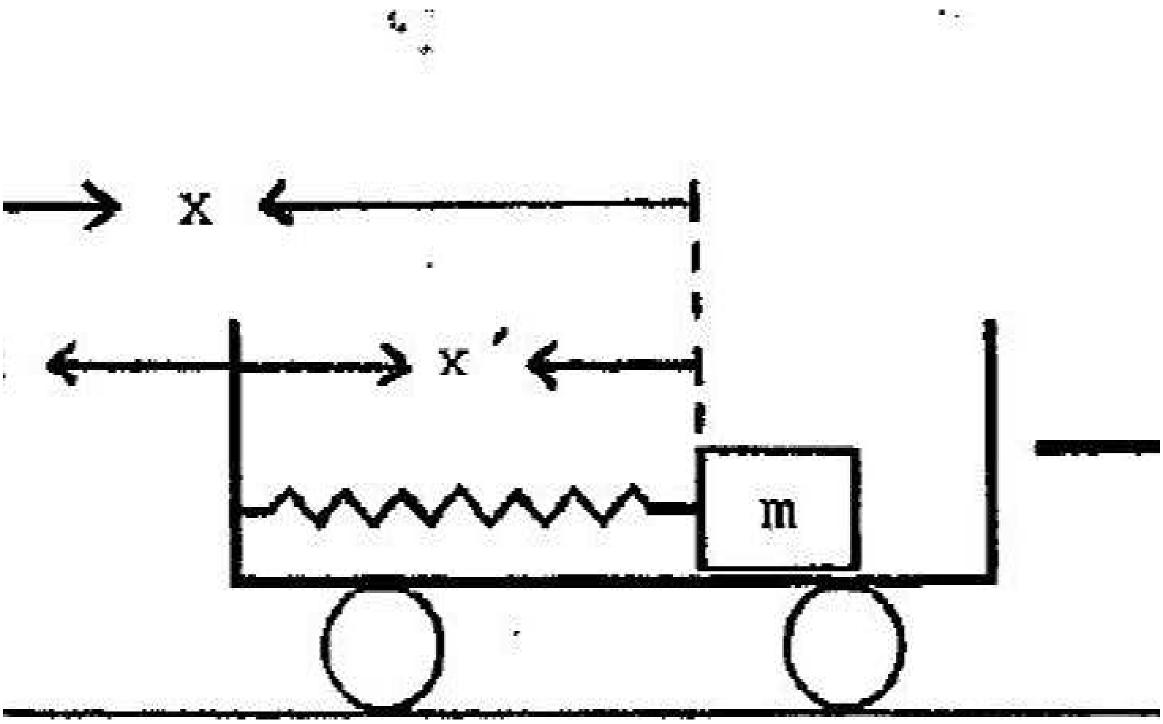

Abbildung 1: Abbildung zu Aufgabe H.20 (b)