Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 6

A.10: Hauptachsentransformation

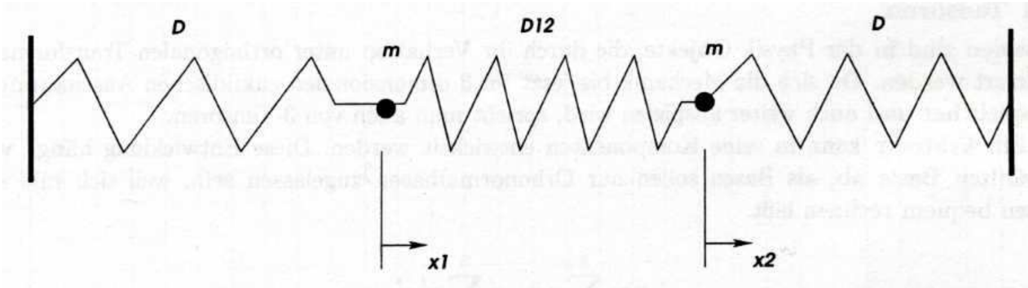

Abbildung 1: Gekoppelte Oszillatoren.

Betrachten Sie die gekoppelten Oszillatoren in Abb. 1.

(a) Finden Sie die Lagrangefunktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen. Schreiben Sie die Differentialgleichungen in der Form

$$\sum_{j=1}^{2} \big(T_{ij}\ddot{x}_j + V_{ij}x_j \big) = 0 \ , \quad i = 1, 2,$$

mit geeignet gewählten Matrizen T und V.

(b) Die Matrix V ist reell symmetrisch und kann deshalb durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren und damit die orthogonale Matrix, die V diagonalisiert. Die Eigenvektoren bilden die Normalmoden des Systems.

A.11 Perle auf Spirale

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei und unter Vernachlässigung der Gravitation auf einer dreidimensionale Spirale.

(a) Führen Sie Zylinderkoordinaten ein und geben Sie sowohl die Zwangsbedingungen als auch die Lagrangefunktion an.

(b) Stellen Sie nun die Lagrangegleichung 1. Art auf und eliminieren Sie die Variablen r, ϕ durch Einsetzen der Zwangsbedingungen, so dass die resultierenden Gleichungen nur noch von z und den Lagrangemultiplikatoren abhängen.

(c) Durch Einsetzen können Sie nun ebenfalls die Lagrangemultiplikatoren entfernen, so dass nur noch eine, ausschlielich von z (und t) abhängige Differentialgeichung verbleibt. Lösen Sie diese Gleichung unter Anwendung der folgenden, nützlichen Identität:

$$\frac{d}{dt}\ln\dot{z} = \frac{\ddot{z}}{\dot{z}}$$

Verwenden Sie diese Lösung, um einen Ausdruck für das Zwangsmoment $Z_\phi = Z_\phi(z)$ anzugeben.

H.12: Eine Anwendung des Noethertheorem (8P.)

Für den harmonischen Oszillator ist eine Symmetrietransformation gegeben durch:

$$x \to x' = x + \alpha\cos\omega t \ ,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ und x eine Lösung der Bewegungsgleichung des harmoischen Oszillators ist.

(a) Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Symmetrietransformation ist, indem Sie überprüfen, dass die zugehörige Lagrangefunktion invariant bleibt. **(4 p.)**

(b) Berechnen Sie die der Symmetrietransformation entsprechende Erhaltungsgröße. Warum ist hierbei die Kenntnis der expliziten Form von $\mathcal{O}(\alpha^2)$-Termen irrelevant?
Hinweis:

Beachten Sie, dass Invarianz nur bis auf Umeichung, d.h. Terme der Form $\frac{d}{dt}F(x', t, \alpha)$ gelten muss!

(4 p.)

H.13: Rutherford-Streuung (12P.)

Eine besonders wichtige Anwendung der Streuung im Zentralpotential ist die Streuung geladener Teilchen im Coulomb-Feld. Das Potential lautet

$$V(r) = \frac{k}{r} \ ,$$

es handelt sich also um das bekannte Keplerproblem.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Streuproblems an, in der der Polarwinkel der aus dem Unendlichen einlaufenden Teilchen gleich 0 sei, der Polarwinkel des Perihels ϕ_0 und der Streuparameter b. Welche Relation besteht zwischen ϕ_0 und dem Streuwinkel Θ? Wie hängt der Streuparameter b mit dem Betrag des Drehimpulses zusammen? **(3 p.)**

(b) Asymptotisch gilt für die einlaufenden Teilchen $\phi \to 0$, $r \to \infty$. Leiten Sie hieraus eine Bedingung für den Perihelwinkel ϕ_0 ab. **(2 p.)**

(c) Nutzen Sie die in (a) gezeigte Relation zwischen Θ und ϕ_0, den Ausdruck für ϕ_0 aus (b) sowie die Relation zwischen $|\vec{B}|$, $|\vec{L}|$ und b, welche Sie aus (a) und der bereits in Aufgabe H.5 (c) hergeleiteten Relation

$$|\vec{B}| = \sqrt{1 + \frac{2E|\vec{L}|^2}{mk^2}} \ ,$$

erhalten, um zu zeigen, dass

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}}$$

gilt. **(3 p.)**

(d) Leiten Sie den differentiellen Rutherfordschen Wirkungsquerschnitt her:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{4E\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right)^2 \ .$$

(4 p.)