Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 3

A.5: Galilei-Gruppe

In der Vorlesung wurde angegeben, dass folgende Koordinatentransformation, die Galilei-Transformation, eine Gruppe definiert:

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = A\vec{x} + \vec{v}\,t + \vec{a} = \phi(A, \vec{v}, \vec{a})\vec{x} \ , \quad t \mapsto t' = t + t_0 \ , \quad A \in \mathrm{SO}(3) \ , \quad \vec{v},\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \ , \quad t_0 \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Was ist eine Gruppe?

(b) Weisen Sie die Gruppeneigenschaften für diese Koordinatentransformation nach!

(c) Ein Schiff hat zur Zeit $t = 0$ die Position $\vec{x}_1(0) = (1, 1)$ und den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1 = (1, 3)$, ein zweites die Position $\vec{x}_2(0) = (10, 3)$ und den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1 = (-\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$. Muss eines der Schiffe den Kurs ändern? Lösen Sie die Aufgabe durch eine (oder zwei?) Galilei-Transformationen (Ortsvektoren in willkürlichen Längeneinheiten, Geschwindigkeitsvektoren in willkürlichen Längeneinheiten/Zeiteinheiten).

A.6: Partielle und totale Ableitungen

(a) Gegeben sei das Funktional $H(p(t), q(t), t)$, wobei die ersten beiden Variablen von der dritten abhängen. Zeigen Sie für die totale Ableitung:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} \ .$$

(b) Es sei nun $H = p^2 + tq^2$ mit $p(t) = t^2$ und $q(t) = t$. Setzen Sie p und q in H ein und berechnen Sie die totale Ableitung dH/dt.

(c) Betrachten Sie als zweites Beispiel das Funktional $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ und zeigen Sie:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \ .$$

(d) Was sind die totalen Differentiale dH und dL?

H.5: Keplerproblem (Teil 1) (10 P.)

Gegeben sei die in der Vorlesung hergeleitete Lösung für das Keplerproblem (Bahnkurve) in Polarkoordinaten:

$$r(\phi) = \frac{|\vec{L}'|^2}{\mu\kappa} \cdot \frac{1}{|\vec{B}|\cos\phi - 1} \ ,$$

(a) Zeige unter Annahme eines attraktiven Potentials, sowie durch Resubstitution in kartesische Koordinaten explizit, dass die Bahnkurve die folgenden Formen annimmt:

$\lvert\vec{B}\rvert = 0$:	Kreis
$0 < \lvert\vec{B}\rvert < 1$:	Ellipse
$\lvert\vec{B}\rvert = 1$:	Parabel
$\lvert\vec{B}\rvert > 1$:	Hyperbel

(4 p.)

(b) Die innere Energie ist definiert durch

$$H' = H - \frac{1}{2}M\dot{R}^2 \ .$$

Leite her, dass

$$H' = \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{y}}|^2 + \frac{\kappa}{|\vec{y}|}$$

gilt! **(3 p.)**

(c) Zeige auch, dass für den Runge-Lenz Vektor der folgende Zusammenhang gilt:

$$|\vec{B}|^2 = 1 + \frac{2}{\mu\kappa^2}H'|\vec{L}'|^2$$

(3 p.)

H.6: Periheldrehung (10 P.)

Eine kleine Störung δU des Newtonschen Gravitationspotentials bewirkt, dass die Bahn bei endlicher Bewegung nicht mehr geschlossen ist. Die Lage des Radiusvektors – und damit die Lage des Perihels, des sonnennächsten Punktes – ändert sich um einen Betrag $\delta\phi$.

(a) Zeigen Sie das im ungestörten Fall $U = U_0$ für den von Perihel zu Perihel überstrichenen Winkel ϕ gilt

$$\phi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{l^2}{r^2}}} \ .$$

Gehen Sie dazu von dem folgenden Ausdruck für die Gesamtenergie aus

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 + U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + U$$

und verwenden Sie

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dr}\dot{r} \ ,$$

um den gewünschten Ausdruck für den Winkel ϕ herzuleiten. Dabei ist zudem die Verwendung einer geeigneten Erhaltungsgröße hilfreich. Beweisen Sie weiterhin

$$2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{L^2}{r^2}}} = -2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{L^2}{r^2}}dr \ .$$

(3 p.)

(b) Setzen Sie nun für $U = U_0 + \delta U$ an, wobei U_0 das (aus der Vorlesung bekannte) ungestörte Gravitationspotential und δU eine kleine Störung ist, d.h. wir nehmen an, dass Terme $\mathcal{O}\left((\delta U)^2\right)$ vernachlässigt werden köennen. Entwickeln Sie die Wurzel mit Hilfe von $\sqrt{a+x} \approx \sqrt{a} + x/(2\sqrt{a})$. Der Term nullter Ordnung liefert $\phi = 2\pi$ – woher wissen Sie das? (Stichwort: Erhaltungsgrössen!)
Zeigen Sie unter Benutzung der ungestörten Bewegung ($dr =$?)

$$\delta\phi = \frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{2m\,\delta U\,dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{L^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial L}\frac{2m}{L}\int_0^{\pi} r^2\delta U d\phi \ .$$

(4 p.)

(c) Berechnen Sie die Winkeländerung für die Störpotentiale $\delta U_1 = \beta/r^2$ und $\delta U_2 = \gamma/r^3$. Skizzieren Sie die Bahnen. **(3 p.)**