Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 10

A.15: Symplektische Matrizen

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der symplektischen Matrizen $M \in Sp(2f)$ eine Gruppe ist, bezüglich der durch die Matrixmuliplikation definierten Verknüpfung "$\circ$"

(b) Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial u} J \frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = (q_1, ..., q_f, p_1, ..., p_f)$$

gilt.

A.16: Hamiltonsche Mechanik

Für ein System mit der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ ist die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, p_i - L$$

die Legendretransformierte von L, es werden sämtliche $\dot{q}_i$ zugunsten von $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ eliminiert.

(a) Schreiben Sie die explizite Formel für H auf und berechnen Sie das Differential dH.

(b) Fassen Sie H als Funktion $H(p, q, t)$ auf und geben Sie das Differential dafür an.

(c) Vergleichen Sie die beiden Differentiale und erhalten Sie die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \; , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \; .$$

Wie unterscheiden sie sich in Anzahl, Typ und Symmetrie von den Euler-Lagrange-Gleichungen?

(d) Zeigen Sie

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

für die totale zeitliche Ableitung von H. Wann ist demnach H erhalten?

(e) Was passiert mit zyklischen Koordinaten beim Übergang zu H?

(f) Welcher physikalischen Größe entspriche H für ein freies konservatives System?

(g) H sei translationsinvariant. Folgern Sie daraus die Erhaltung des Gesamtimpulses.

(h) Geben Sie H für den harmonischen Oszillator und das Keplerproblem an. Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

(i) Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right) \stackrel{!}{=} \text{extremal}$$

her, indem Sie $q_i(t)$ durch $q_i + \epsilon\, \eta_i(t)$ und $p_i(t)$ durch $p_i(t) + \epsilon\, \pi_i(t)$ ersetzen. Verfahren Sie dann so wie bei der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen. Was müssen Sie für die Randterme fordern?

H.21: Poissonklammern (10P.)

Bei der Untersuchung von Symmetrien im Hamilton-Formalismus spielen *Poissonklammern* eine wichtige Rolle. Die Poissonklammern zweier Größen $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ sind definiert als

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) .$$

(a) Berechnen Sie die *fundamentalen Poissonklammern* u, u. **(3p.)**

(b) Rechnen Sie nach, dass Ableitungen mit Poissonklammern geschrieben werden können:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = J\{f, u\} , \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} .$$

Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen entsprechend um. **(4p.)**

(c) Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\} , \quad \frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{\{f, g\}, H\} ,$$
$$\big\{\{f, g\}, h\big\} + \big\{\{h, f\}, g\big\} + \big\{\{g, h\}, f\big\} = 0 .$$

(3p.)

H.22 Kanonische Transformationen (10P.)

Wie in Aufgabe A.16 gezeigt, können die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip hergeleitet werden. Das Extremum dieses Integrals ändert sich bei einer Transformation

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) , \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

($\mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ etc.) genau dann nicht, wenn sich die Integranden um eine totale Zeitableitung $dF(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, t)/dt$ unterscheiden. Da die Variablen aufgrund der Transformation nicht alle unabhängig sind, hängt F nur von $2n$ Größen sowie der Zeit ab. Solche Transformationen heißen *kanonisch*. Sie erfüllen die fundamentalen Poissonklammern und erhalten die Form der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

(a) Es sei $F = F_1(\mathbf{Q}, \mathbf{q}, t)$. Leiten Sie damit

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} , \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad \text{und} \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

her. **(2p.)**

(b) Nun sollen die Transformationen von anderen Variablen abhängen. Dazu definieren wir $\hat{F}_2(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t) = F_2(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{QP}$, wobei $\mathbf{QP} = \sum_{i=1}^{n} Q_i P_i$ gilt. Wie lauten die äquivalenten Gleichungen zu Teil (a) fr $\hat{F}_2(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$? Was ist der Zusammenhang zwischen $F_1(\mathbf{Q}, \mathbf{q}, t)$ und $F_2(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)$? (Koeffizientenvergleich!) **(3p.)**

(c) Führen Sie die Umrechnung auf die anderen Koordinatensätze durch, $F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$ sowie $F_4(\mathbf{P}, \mathbf{p}, t)$. Verwenden sie hierzu eine Legendre-Transformation. **(2p.)**

(d) Betrachten Sie das Beispiel des harmonischen Oszillators. Zeigen Sie, dass die (nicht explizit zeitabhängige – was folgt daraus?) Transformation

$$P = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}\ , \quad p = m\omega q \cot Q$$

im obigen Sinne kanonisch ist. Wie lauten die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten und die neuen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen? Finden Sie eine Erzeugende $F(q, Q)$. **(3p.)**