Übungsblatt 6 zur Vorlesung 'Numerische Methoden der Physik' SS 2011

Carsten Urbach und Mitarbeiter

Abgabe: Mittwoch, den 6. Juli 2011, 8 Uhr per email

Sterne in zylindrischen Galaxien (10 Punkte)

Für die Beschreibung der Stern-Bewegung in zylindrischen Galaxien kann man als Modell-Potential das sogenannte Hénon-Heiles Potential

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3\right)$$

verwenden. Die zugehörige Hamilton-Funktion lautet dann

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)\,.$$

Zeigen Sie analytisch, dass die Energie E eine Konstante der Bewegung in diesem System ist.

Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Systems? Schreiben Sie diese als Differentialgleichungen erster Ordnung für x, y, p_x und p_y.

Abhängig vom Wert der Energie E zeigt das Hénon-Heiles System chaotisches Verhalten. Untersuchen Sie für die Werte $E = 1/12$, $E = 1/8$ und $E = 1/6$ das Verhalten des Systems, indem Sie die Bewegungsgleichungen für jeden Wert von E mit zwei verschiedene Anfangsbedingungen numerisch integrieren und Ihre Ergebnisse anschließend in einer sogenannten Poincaré-Abbildung für (p_y, y) darstellen.

Bei der Poincaré-Abbildung handelt es sich um ein Streudiagramm aller Punkte (p_y, y), wobei als Zusatzbedingungen $x = 0$ und $p_x > 0$ gelten sollen. Identifizieren Sie periodische und chaotische Bahnen. Für welche Energiewerte finden Sie chaotisches Verhalten? Überprüfen Sie explizit, dass für die Wahl Ihrer Integrationsroutine die Energie auch numerisch zu guter Genauigkeit (z.B. Abweichung $< 10^{-5}$) erhalten ist.

Stellen Sie ebenfalls eine chaotische und eine nicht-chaotische Bahn in einer (x, y) Abbildung dar.

Hinweise:

- Benutzen Sie mindestens das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung RK4.
- Anfangsbedingungen können Sie bestimmen, indem sie Werte für y, p_y und $p_x > 0$ finden (mit $x = 0$), so dass

  $$E = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(0, y)$$

  gilt. Hier gibt es natürlich viele Lösungen, von denen Sie möglichst viele für Ihre Analyse verwenden sollten.

- Wählen Sie die Anfangsbedingungen aus Stabilitätsgründen so aus, dass $|p_y| \leq 0.5$ und $|y| \leq 0.5$ gilt.
- Ihr Programm rechnet unter Umständen recht lange.

Literatur:

M. Hénon and C. Heiles, *The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments*, Astron. J. **69** 1, 1964

Hinweise zum Individualzettel:

- Der vorliegende Zettel kann nicht in Gruppen abgegeben werden.
- Da er als Individual-Leistung zählt, müssen zum Bestehen 50% der Punkte auf diesem Zettel erreicht werden.
- Bei Nichterreichen der 50% auf diesem Zettel, kann das mit dem siebten Zettel nachgeholt werden, der ebenfalls ein Individualzettel ist.