Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 5

A.9: Noethertheorem

Aufgrund der Wichtigkeit des Noethertheorems für die theoretische Mechanik, aber auch für die Physik im Allgemeinen, wollen wir dessen Herleitung hier anhand eines Variationsansatzes erneut nachvollziehen. Wir gehen aus von der Forderung $\delta S = \delta S'$.

(a) Zeigen sie, dass diese Forderung auch dann noch erfüllt ist, wenn zu L eine totale Zeitableitung addiert wird, und demnach die Bewegungsgleichungen invariant sind.

Gegeben seien die Koordinaten q_α, welche auf folgende Weise transformiert werden:

$$q_\alpha(t) \mapsto q'_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \lambda I_\alpha(q, \dot{q}, t) \ . \tag{1}$$

(b) Begründen Sie, warum sich die Forderung $\delta S = \delta S'$ übersetzt in

$$\frac{d}{d\lambda} L(q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha, t)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{dt} F(q, t) \ .$$

(c) Berechnen Sie aus Gl. (1) dq'/dt und dL/dt.

(d) Zeigen Sie, dass

$$Q = \sum_\alpha \pi_\alpha I_\alpha - F(q, t)$$

mit $\pi_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ eine Erhaltungsgröße ist, indem Sie mit Hilfe der eben gezeigten Relation $\frac{d}{d\lambda} L(q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha, t)\big|_{\lambda=0}$ berechnen.

(e) Bestimmen Sie die Erhaltungsgrößen, die sich aus folgenden Transformationen ergeben:

(i) $q'_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \lambda$, i fest und q_α zyklisch;

(ii) $q'_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \lambda$, $L = \frac{1}{2} \sum_\beta m_\beta (q_\beta - \dot{q}_\beta t)^2 / t^2$ und i fest;

(iii) $q'_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \lambda \dot{q}_\alpha(t)$, L sei nicht explizit zeitabhängig;

(iv) $q'_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \lambda t$ und $L = \frac{1}{2} \sum_\beta m_\beta \dot{q}_\beta^2$.

(v) Zeigen Sie, dass der infinitesimale Erzeuger von Drehungen des Vektors $\vec{r}$ um den Winkel λ in Richtung $\vec{n}$ gegeben ist als $\vec{I} = \vec{n} \times \vec{r}$. Bestimmen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße für ein freies Teilchen!

H.9: Zwei Massen und eine Tischplatte (8P.)

Gegeben sei eine Tischplatte mit einem engen Loch in der Mitte. Durch dieses Loch werde ein als masselos zu behandelndes Seil der Länge l geführt, das zum Teil noch auf dem Tisch liegt und an dessen Enden sich die Massen m_1 und m_2 befinden. Das Seil bewegt sich reibungsfrei. m_2 lässt man senkrecht nach unten hängen, während sich m_1 reibungsfrei auf der Tischplatte bewegen kann.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und finden Sie die Bewegungsgleichungen. **(2 p.)**

(b) Benutzen Sie die Erhaltungsgrößen des Systems, um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen und auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zu bringen. **(2 p.)**

(c) Bei geeigneten Anfangsbedingungen bewegt sich m_1 auf einer Kreisbahn. Lösen Sie für diesen Fall die Bewegungsgleichungen. Wie sieht die Gleichgewichtslage aus? **(2 p.)**

(d) Was zeichnet diese Lage aus? Wie hätte man diese Lösung auch ohne Lagrangeformalismus ermitteln können? Diskutieren Sie die auftretenden Kräfte. **(2 p.)**

H.10: Perle auf Schraubenlinie (6P.)

Eine Perle gleite in einem homogenen Gravitationspotential (in negativer z-Richtung zeigend) reibungsfrei auf einem schraubenförmigen Draht mit Radius R und Ganghöhe a.

(a) Wählen Sie generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Finden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. **(3 p.)**

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $\varphi(t)$ und folglich $z(t)$ für die Anfangsbedinungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$. **(3 p.)**

H.11: Perle auf rotierendem Draht (6P.)

An einer vertikalen Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Perle der Masse m gleitet.

(a) Wählen Sie generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Finden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. **(3 p.)**

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen $z(t)$ für die Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$. Lösen Sie dazu zunächst die homogene DGL und verwenden Sie dann den Ansatz $z_{\text{inh}}(t) = z_{\text{hom}}(t) + C$, wobei C eine Konstante ist. **(3 p.)**