Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 4

A.7: Keplerproblem (Teil 2)

Zeigen Sie, dass die kinetische Energie des Keplerproblems invariant ist unter Drehungen!

A.8: Lagrangefunktion, Zwangsbedingungen und Bewegungsgleichungen

(a) Betrachten Sie eine Punktmasse m, welche reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels mit Öffnungswinkel α rollt. Führen Sie geignete Koordinaten ein und stellen Sie die Lagrangefunktion auf! Wie lautet die Zwangsbedingung und um welchen Typ von Zwangsbedingung handelt es sich hierbei? Leiten Sie anschließend die Bewegungsgleichungen her!

(b) Ein homogener Zylinder mit Radius r und Masse m rollt ohne Schlupf eine Ebene der Länge L mit Steigungswinkel α hinab. Der Zylinder hat das Trägheitsmoment $I = m\frac{r^2}{2}$. Leiten Sie analog zu (a) die Bewegungsgleichungen her!

(c) Ein ebenes Pendel der Länge l und Masse m vollführt auf der x-Achse (horizontal) harmonische Schwingungen:

$$x = A\cos(\omega t)$$

Stellen Sie auch für diesen Fall die Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung her! Welche Zwangsbedingungen treten hier auf?

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung aus (c) unter der Annahme kleiner Auslenkung des Pendels und unter Verwendung der Anfangsbedingungen $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, wobei ϕ den Auslenkungswinkel des Pendels bezeichnet.

(e) Betrachten Sie eine Rolle der Masse m, mit Radius r und einem Trägheitsmoment I, die quer zur Fahrtrichtung auf einem Wagen liegt. Welche Beschleunigung erfährt die Rolle, wenn der Wagen beschleunigt wird unter der zusätzlichen Annahme, dass kein Gleiten der Rolle eintritt?

<u>*Hinweis:*</u>

> *Überlegen Sie sich hierzu, welche Bedingung das Rollen beschreibt und stellen Sie dann die Lagrangefunktion auf!*

H.7: Keplerproblem (Teil 3) (8P.)

Wenden Sie den Lagrangeformalismus auf das Keplerproblem an. Es sei also $V = -\alpha/r$; nehmen Sie die Sonne als ruhend an.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten auf. **(3 p.)**

(b) Welche Koordinaten sind zyklisch? Welche Erhaltungsgrößen gibt es und wie sehen sie aus? **(3 p.)**

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen! **(2 p.)**

H.8: Perle auf gebogenem, rotierendem Draht (12P.)

Auf einem parabelförmig gebogenen Draht, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht, gleitet eine Perle. Die Schwerkraft wirkt in negativer z-Richtung. Wir wollen dieses System mit Hilfe von *Zwangskräften* beschreiben, die in der Vorlesung eingeführt worden sind, d.h. das System wird beschrieben durch die Gleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z} \ , \tag{1}$$

wobei $\vec{Z}$ die Zwangskräfte beschreibt.

(a) Da die Bewegung der Perle im $\mathbb{R}^3$ auf eine *ein*dimensionale Kurve eingeschränkt ist, muss es offenbar *zwei* Zwangsbedingungen geben. Wie lauten diese? **(2 p.)**

(b) Warum ist in diesem Problem die Verwendung von Zylinderkoordinaten sinnvoll? Schreiben Sie $\vec{r} = (x, y, z)$ in Zylinderkoordinaten um, verwenden Sie die Zwangsbedingungen aus (a) und schreiben Sie die drei Komponenten von Gl. (1) als Funktionen der unabhängigen Koordinate r. **(2 p.)**

Die in (b) konstruierten 3 Gleichungen enthalten 4 Unbekannte: $r(t)$, Z_x, Z_y und Z_z. Wir müssen nun die Zwangskräfte $\vec{Z} = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2$ konstruieren; dabei sei $\vec{Z}_1$ die Zwangskraft, die die Perle innerhalb der rotierenden Ebene, die vom Draht aufgespannt wird, auf dem parabelförmigen Draht hält, und $\vec{Z}_2$ die Zwangskraft, die die Rotation der Ebene erzwingt. Beide müssen, da sie keine Zwangs*arbeit* verrichten, orthogonal zum Draht stehen.

(c) Zeigen Sie, dass für die Komponenten von $\vec{Z}_1$ gelten muss:

$$Z_{1x} \sin \omega t = Z_{1y} \cos \omega t \qquad \text{sowie} \qquad z'(r) = \tan \beta = \frac{\sqrt{Z_{1x}^2 + Z_{1y}^2}}{Z_{1z}} \ ,$$

wobei β der Steigungswinkel des Drahtes auf der (x, y)-Ebene ist. Nutzen Sie diese Relationen zur Eliminierung von Z_{1y} und Z_{1z}. **(2 p.)**

(d) Begründen Sie, dass für die Zwangskraft $\vec{Z}_2$ gilt

$$Z_{2x} \cos \omega t = -Z_{2y} \sin \omega t \qquad \text{sowie} \qquad Z_{2z} = 0 \ ,$$

und nutzen Sie dies zur Eliminierung von Z_{2y} (und Z_{2z}). **(2 p.)**

(e) Eliminieren Sie die verbleibenen beiden Unbekannten Z_{1x} und Z_{2x} aus dem Gleichungssystem und finden Sie die folgende Bewegungsgleichung für die unabhängige Koordinate r:

$$(1 + 4a^2 r^2)\ddot{r} + 4a^2 r\dot{r}^2 + (2ag - \omega^2)r = 0 \ .$$

(Was ist a?) Für welche Winkelgeschwindigkeit bleibt die Perle an einer festen Stelle des Drahtes? **(4 p.)**