Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 12

A.18 Hamilton-Jacobi-Gleichungen

(a) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichungen für die freie Bewegung auf. Zeigen Sie, dass sich diese durch den Ansatz

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} - E\,t$$

lösen lassen.

Die Beobachtung an diesem trivialen Beispiel ist allgemein gültig: Ist eine Variable q_j zyklisch, so lässt sie sich in der Wirkungsfunktion durch den einfachen linearen Separationsansatz

$$S(q_i, P_i, t) = S'(q_{i\neq j}, P_{i\neq j}, t) + q_j P_j$$

beschreiben.

(b) Betrachten Sie nun das folgende Problem in Kugelkoordinaten, das eine Variablenseparation erlaubt: Die Hamiltonfunktion sei gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r,\theta)\ ,$$
$$V(r,\theta) = A(r) + \frac{B(\theta)}{r^2}\ ,$$

mit beliebigen Funktionen $A(r)$, $B(\theta)$. Bestimmen Sie formal die Wirkungsfunktion S durch den Separationsansatz

$$S(r,\theta,\phi) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi) - E\,t\ .$$

Beachten Sie die Erkenntnis aus (a) (welche Variablen sind hier zyklisch?). Die verbleibenden Integrale über r und θ sind (für beliebige Funktionen $A(r)$ und $B(\theta)$) natürlich nicht explizit auszuführen!

A.19 Phasenbahnen des freien Falls

Betrachten Sie die eindimensionale, vertikale Bewegung einer großen Zahl G von Teilchen der Masse m im homogenen Gravitationsfeld. Die Teilchen wechselwirken nicht untereinander. Jedes *System* besteht somit nur aus einem Teilchen, und die *Gesamtheit* wird durch G Teilchen im zweidimensionalen Phasenraum gebildet.

(a) Geben sie die Gesamtenergie des Systems in Abhängigkeit der Phasenraumkoordinaten an. Was ergibt sich folglich für die Phasenbahnen?

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen die Teilchenimpulse zwischen $p_1 \leq p \leq p_2$ und die Energien zwischen $E_1 \leq E \leq E_2$ liegen. Berechnen sie die vom Punktschwarm im Phasenraum überdeckte Fläche A.

(c) Wie lauten die Teilchenimpulse zur Zeit $t > 0$? Was gilt demnach für die Dichte der Phasenpunkte?

H.26 Überlagerung von Zentralkraft und homogenem Feld (20P.)

„Lösen“ Sie mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Methode das Problem der Bewegung eines Teilchens in der Überlagerung eines Zentralkraftfeldes mit einem homogenen Feld, d.h. das Potential sei gegeben durch

$$V = \frac{\gamma}{r} - F\,z\ .$$

Gehen Sie dabei vor wie folgt:

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion des Problems in Zylinderkoordinaten an. **(3 p.)**

(b) Verwenden Sie nun die sogenannten *parabolischen* Koordinaten (ξ, η, ϕ), die mit den Ihnen bekannten Zylinderkoordinaten (ρ, z, ϕ) zusammenhängen wie

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)\ , \qquad \rho = \sqrt{\xi\eta}\ , \qquad \phi \text{ unverändert.}$$

Rechnen Sie die Lagrangefunktion in parabolische Koordinaten um. **(3 p.)**

(c) Berechnen Sie die kanonischen Impulse p_ξ, p_η und p_ϕ und hieraus die Hamiltonfunktion in parabolischen Koordinaten. **(4 p.)**

(d) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf. Welchen Ansatz wählen Sie angesichts der Tatsache, dass das Potential nicht explizit zeitabhängig ist? **(4 p.)**

(e) Wie lautet der Ansatz für die Wirkungsfunktion, wenn diese in den Variablen ξ, η, ϕ vollständig separiert? Gibt es zyklische Variablen? Welche Vereinfachung folgt daraus? Berechnen Sie die Wirkungsfunktion (ohne die verbleibenden eindimensionalen Integrale explizit auszuführen!). **(6 p.)**

H.27 Kanonische Transformationen? (1) (6P.)

Explizit zeit*unabhängige* Transformationen lassen die Hamiltonfunktion invariant (in der Notation der Vorlesung: $K = H$), so dass sich die Bedingung für eine kanonische Transformation vereinfacht zu

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i\right) = \frac{dF}{dt}$$

oder, äquivalent,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i dq_i - P_i dQ_i\right) = dF\ ,$$

d.h. die linke Seite muss als totales Differential zu schreiben sein. Zeigen Sie damit, dass die folgenden Transformationen kanonisch sind:

(a) $Q = \arctan \frac{q}{p} \qquad P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ **(3 p.)**

(b) $Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right) \qquad P = q \cot p$ **(3 p.)**

H.28 Kanonische Transformationen? (2) (4P.)

Der Vorlesung zufolge ist eine Transformation kanonisch, wenn die fundamentalen Poissonklammern erhalten bleiben:

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0 = [P_i, P_j]_{q,p} \ , \quad [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij} \ .$$

Welche der folgenden Transformationen sind demzufolge kanonisch?

(a) $Q = \arctan \frac{q}{p} \qquad P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ **(2 p.)**

(b) $Q_i = p_i \qquad P_i = -q_i$ **(1 p.)**

(c) $Q_i = p_i \qquad P_i = q_i$ **(1 p.)**

Bemerkung:

Wie dem aufmerksamen Leser nicht entgehen wird, sind auf diesem (letzten) Hausaufgabenzettel 30 (statt sonst 20) Punkte zu erreichen. *Nur 20 davon* werden auf das Quorum angerechnet, von dem zur Klausurzulassung 50% zu erreichen sind; es sind also gewissermaßen 10 „Bonuspunkte“ zu vergeben.